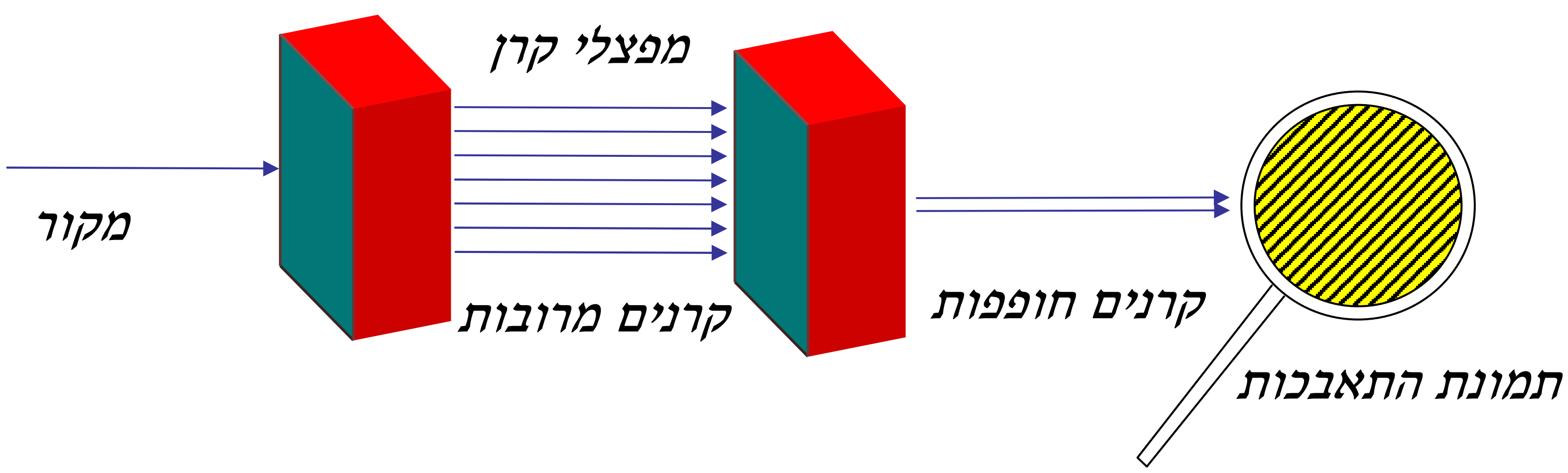
התאבכות רבת קרנים

- ראינו שאינטרפרומטרים של שתי קרנים מסוגלים להגיע לדיוק גבוה, אבל הפסים היו סינוסואידלים.
- בגלל צורתם העגולה, קשה לגלות את שיאיהם בדיוק רב.
- בעיה זו נפתרת בהתאבכות של הרבה קרנים, שאז ניתן לדייק בשיאים.
- דוגמה שראינו להתאבכות כזאת היא בסריג העקיפה שבו התאבכו הקרנים בהפרשי מופע קבועים.
- דרך אחרת לקבלת קרנים רבות מתאבכות היא באמצעות החזרה מקירות מקבילים של לוח שקוף.
- כל החזרה קדימה ואחורה של הקרנים מוסיפה להם מופע קבוע.
- אם נפלט מעט מהאור בכל החזרה כזאת, נקבל התאבכות של קרנים מרובות עם הפרשי מופע קבועים.



החזרה מלוח

- נניח שמקדם ההחזרה הוא $\mathcal{R}$ ומקדם ההעברה הוא $\mathcal{T}$. מקדמים אלו הם של *משרעת* הגל.
- אם נבדוק את סך הכל האנרגיה, הרי שסכום העוצמות צריך להישמר, כלומר באין בליעה

$$\mathcal{R}^2+\mathcal{T}^2=1$$

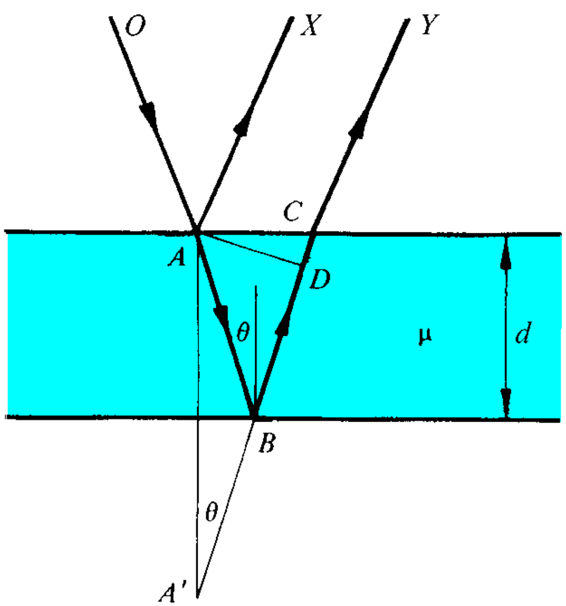
- נחשב את הפרשי המופע במחזור אחד. עובי הלוח הוא d ומקדם השבירה הוא μ.
- *בתוך* התווך הקרן פוגעת בשפה בזווית θ לניצב.
- נתבונן בקרן החוזרת לאחר פגיעה חיצונית אחת, OAX, שחזית הגל שלה (הניצבת לקרן) היא AD.
- לאחר החזרה במשטח התחתון בנקודה B, הקרן BCY יוצאת החוצה וגם עבורה חזית הגל היא AD .
- הפרש הקרנים הוא $ABD=\mu\,(AB+BD)$.
- נבנה את הנקודה A' שהיא החזרת הנקודה A במשטח התחתון. נקבל

$$AB+BD=A'D=2\,d\cos\theta$$

- הפרש המופע בין שתי הקרנים המתאבכות AD הוא

$$2\pi\,ABD/\lambda=k_0\,ABD=2\,k_0\,\mu\,d\cos\theta\equiv g$$

- הפרש המופעים איננו פעמים היטל העובי AB של הלוח.
- בנוסף, g יורד עם עלית זוית הפגיעה θ.

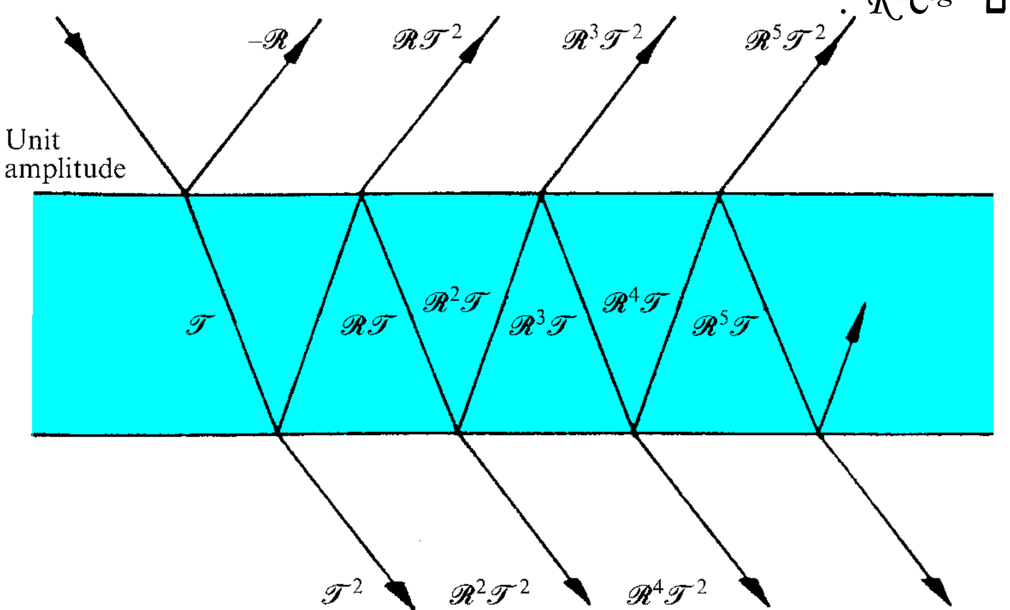


החזרה מרובה מלוח

- נתבונן כעת בהחזרה מרובה. מקדם ההחזרה הוא $\mathcal{R}$ אבל ערכו שונה מאיזה כיוון מגיע האור.
- נניח ש- $\mathcal{R}$ הוא מקדם ההחזרה מן הצד הפנימי, אזי החזרה מן הצד החיצוני תהיה $\mathcal{R}' = -\mathcal{R}$. מקדמים אלו הם של *משרעת* הגל.
- המצב דומה לסריג עקיפה, אלא שכאן הגלים המתאבכים יורדים בעוצמתם. הגלים העוברים יהוו סדרה

$$\psi(g) = \mathcal{T}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \mathcal{R}^{2p} e^{ipg}$$

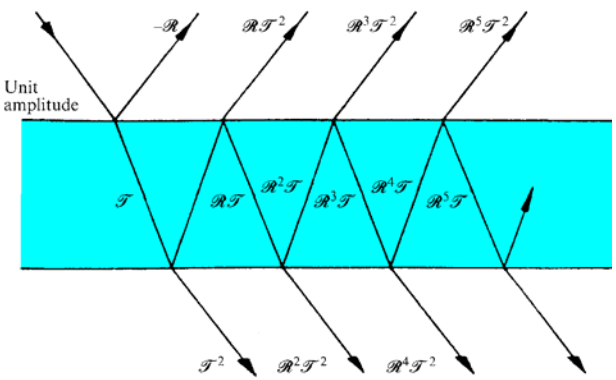
- ניתן לחשב פונקציה זו כטור פוריה עם מקדמים $a_p = \mathcal{R}^{2p}$.
- לחלופין, מחשבים אותה כסדרה הנדסית עם גורם $\mathcal{R}^2 e^{ig}$.



החזרה מרובה: טור פוריה

$$\psi(g) = \mathcal{T}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \mathcal{R}^{2p}\, \mathrm{e}^{ipg}$$

- זהו טור פוריה המיצג פונקציה הרמונית שאורך המחזור שלה הוא $\Delta g = 2\pi$.
- הפונקציה בכל מחזור היא התמרת פוריה של המקדמים $\mathcal{R}^{2p}$ כאשר p נחשב משתנה רציף.
- ניתן להציב



$$\mathcal{R}^{2p} = \exp\,(2p \ln \mathcal{R}) \equiv \exp\,(-\alpha p)$$

- יש לחשב את ההתמרה של

$$f(p) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\alpha p} & p \geq 0 \\ 0 & p < 0 \end{cases}$$

- כיון שהמשתנים p ו- g צמודי פוריה, מקבלים

$$F(g) = \int_0^{\infty} \exp\left[-(\alpha + ig)p\right] \mathrm{d}p = \frac{1}{\alpha + ig}$$

- מציבים את ערך α ומקבלים את השדה והעוצמה

$$F(g) = \frac{1}{-2\ln\mathcal{R} + ig} \;;\; \left|F(g)\right|^2 = \frac{1}{4(\ln\mathcal{R})^2 + g^2}$$

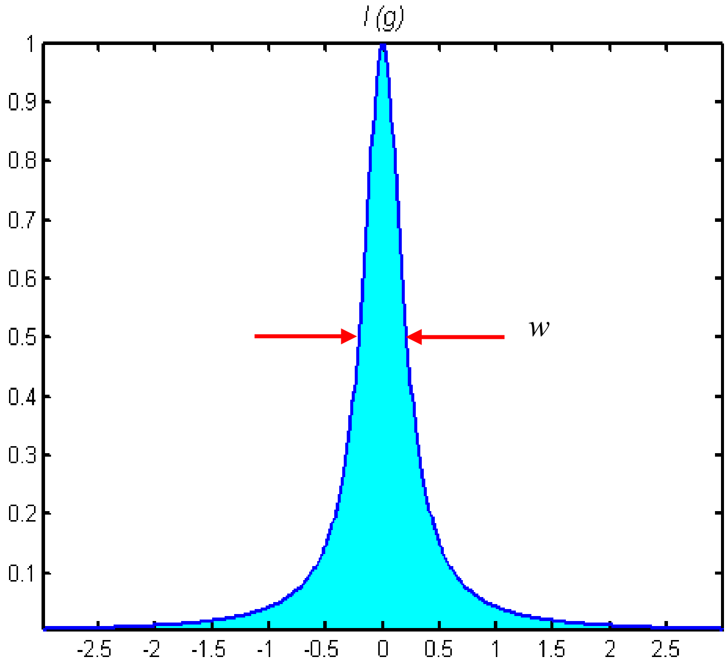
החזרה מרובה: הלורנציאן

$$I(g)=\frac{1}{4(\ln\mathcal{R})^2+g^2}$$

- פונקצית פילוג העוצמה קרויה לורנציאן (Lorentzian). היא דומה במקצת לגאוסיאן אך דועכת לאט יותר בשולים.
- רוחב הלורנציאן נקבע בחצי הגובה, וערכו w. הערך של g בחצי הגובה הוא $g_H = \pm|\ln\mathcal{R}|$. מכאן

$$w=2g_H=4|\ln\mathcal{R}|\approx 4(1-\mathcal{R})$$

- הקירוב נכון עבור החזרה גבוהה, $\mathcal{R}\approx 1$, שאז גם חפיפת השיאים הקרובים זניחה.

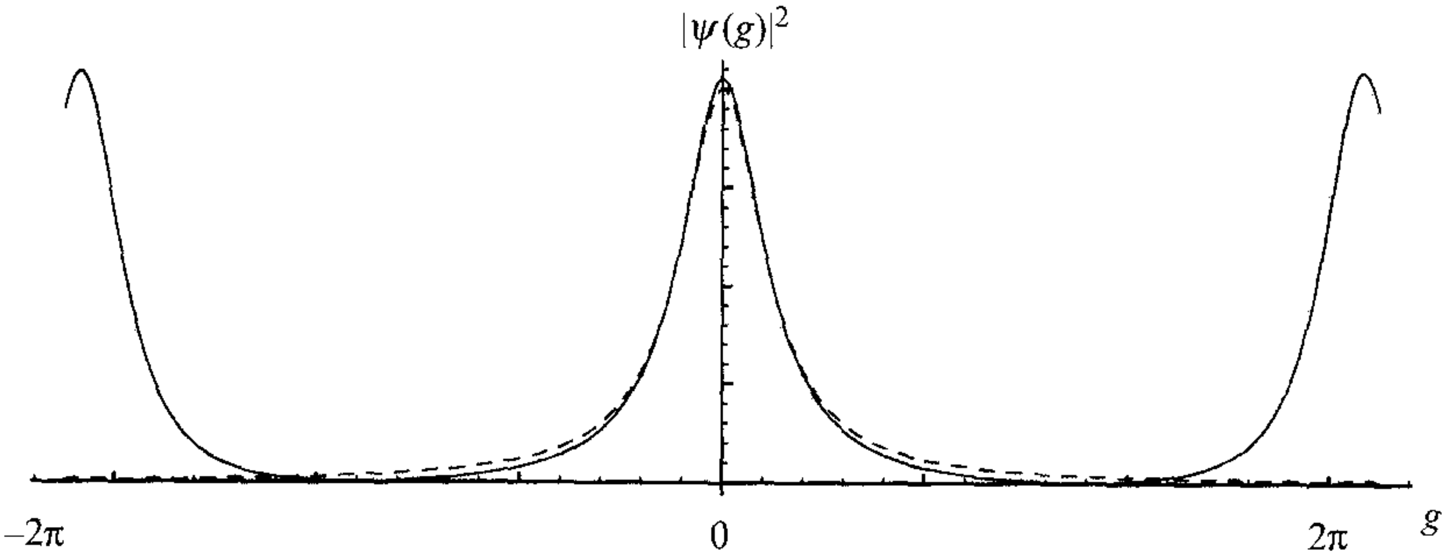


לורנציאנים

- עושים קונבולוציה של השדה של סדר אחד

$$F(g)=\frac{1}{-2\ln\mathcal{R}+ig}\ ;\ \left|F(g)\right|^2=\frac{1}{4(\ln\mathcal{R})^2+g^2}$$

- עם שורת פונקציות ה-δ הנובעות מאוסף הסדרים.
- עבור כל סדר m מקבלים $\delta\,(g-2\,m\,\pi\,)$ (קו מרוסק). עבור סכומם מקבלים את הפונקציה חוזרת על עצמה (קו מלא)



סיכום טור

- דרך שניה: נפתח את הסדרה ההנדסית

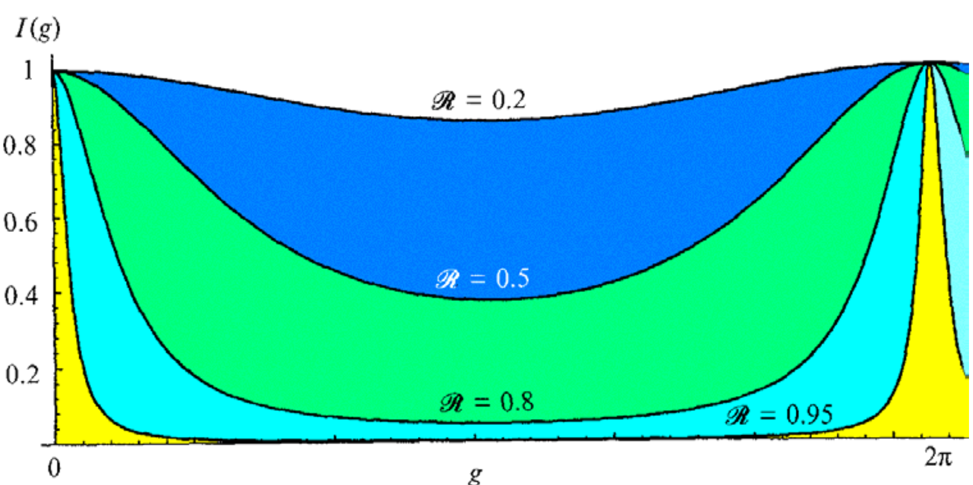
$$\psi(g) = \mathcal{T}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \mathcal{R}^{2p} \mathrm{e}^{ipg} = \mathcal{T}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \left[\mathcal{R}^2 \mathrm{e}^{ig}\right]^p = \frac{\mathcal{T}^2}{1-\mathcal{R}^2 \mathrm{e}^{ig}}$$

- ונחשב את העוצמה

$$I(g) = \left|\psi(g)\right|^2 = \frac{\mathcal{T}^4}{1+\mathcal{R}^4 - 2\mathcal{R}^2 \cos g} = \frac{\mathcal{T}^4}{\left(1-\mathcal{R}^2\right)^2 + 4\mathcal{R}^2 \sin^2(g/2)}$$

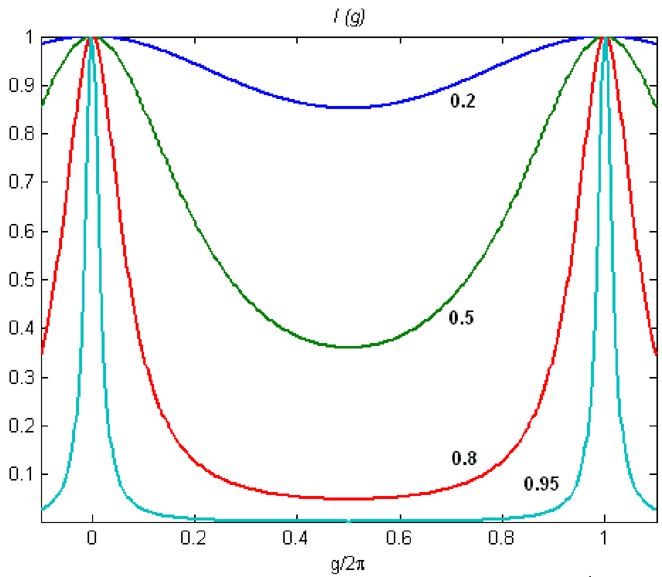
$$= \left(\frac{\mathcal{T}^2}{1-\mathcal{R}^2}\right)^2 \frac{1}{1+F\sin^2(g/2)}$$

- כאשר גורם הפינֶס (finesse) שהוא העדינות, או החדות, של הסריג הוא



$$F = \left(\frac{2\mathcal{R}}{1-\mathcal{R}^2}\right)^2$$

שיאי החזרות



- חישבנו את העוצמה ואת חדות הקוים

$$I(g)=\left(\frac{\mathcal{T}^2}{1-\mathcal{R}^2}\right)^2 \frac{1}{1+F\sin^2(g/2)}\ ;\ F=\left(\frac{2\mathcal{R}}{1-\mathcal{R}^2}\right)^2$$

- העוצמה מגיעה לערכה המירבי כאשר הסינוס מתאפס, או $g = m\pi$.
- אם אין בליעה בלוח, אזי $\mathcal{R}^2+\mathcal{T}^2=1$ ומכאן שהמקדם הוא 1:
  אפילו כאשר ההעברה $\mathcal{T}$ כמעט אפס, בשיאים מועבר כל האור.
- זה נובע מכך שהגל העובר נובע מהתאבכויות בונות של הרבה החזרות חלשות.
- כאשר גורם הפינֶס קרוב ליחידה (כאשר ההחזרה $\mathcal{R}$ קרובה ליחידה) שיאים אלו צרים ביותר. ראינו קודם שרוחבם בחצי הגובה הוא $w \approx 4(1 - \mathcal{R})$. בין השיאים הפונקציה מגיעה בערך לשיעור $1/F \ll 1$.
- ניגוד הפסים הוא הפרש העוצמות המירבי חלקי סכומן, והוא $F/(2+F)$.
- נחשב שוב את רוחב הפסים בחצי הגובה, כאשר בשיא הגובה הוא $F\sin^2(g/2)=1$. מכאן

$$w=2g_H=2\times 2\arcsin F^{-1/2}\approx 4F^{-1/2}\approx 4\left(1-\mathcal{R}\right)$$

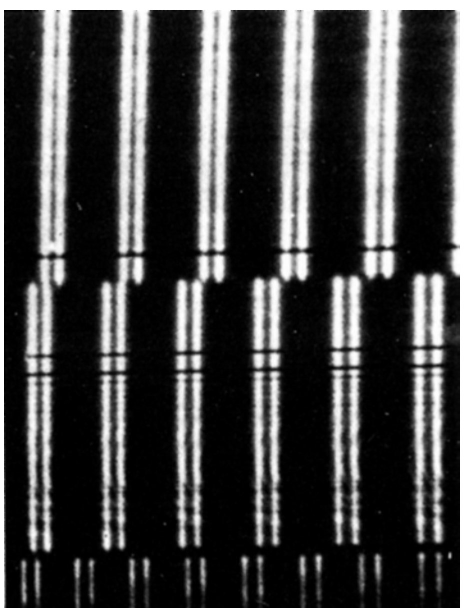
- הקירוב האחרון הוא כאשר ההחזרה $\mathcal{R}$ קרובה ליחידה.

רוחב השיאים

- הרוחב בחצי הגובה של הקוים הוא

$\mathcal{R}$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98
$w \approx 4(1-\mathcal{R})$	0.54	0.36	0.24	0.15	0.07	0.03	0.01

- בהתאבכות יאנג הרוחב הוא 0.5, ולכן רק בהחזרות גבוהות יותר יש שיפור.
- באור המוחזר ההתנהגות בדיוק הפוכה, ושם יש קוים כהים במקום שכאן הם בהירים.

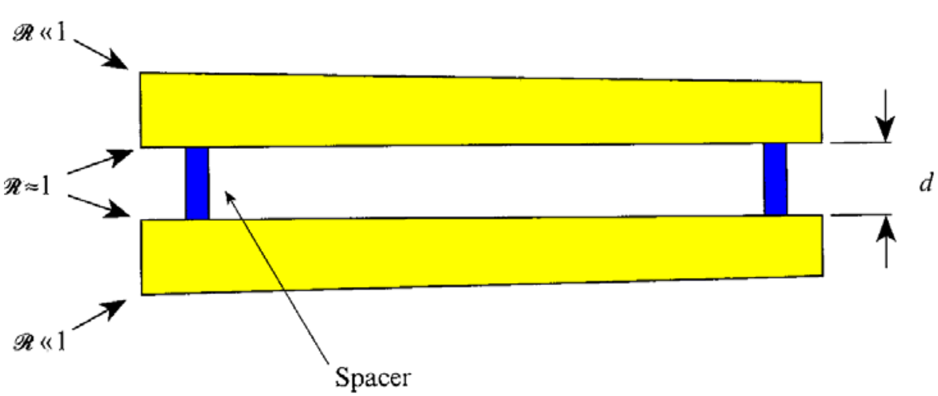


- בדגם המיקה כאן צופו שני הצדדים כדי להגיע להחזרה גבוהה.
- קיימת תלות מחזורית של $g = 2\, k_0\, \mu\, d \cos\theta$ בזוית.
- האפקט המחזורי יכול להתקבל גם כתלות באורך הגל.
- במיקה יש פיצול במישורים מקבילים ולכן קפיצות בעובי.
- בנוסף, מיקה הוא חומר כפול שבירה, ועל כן יש לו שני מקדמי שבירה.

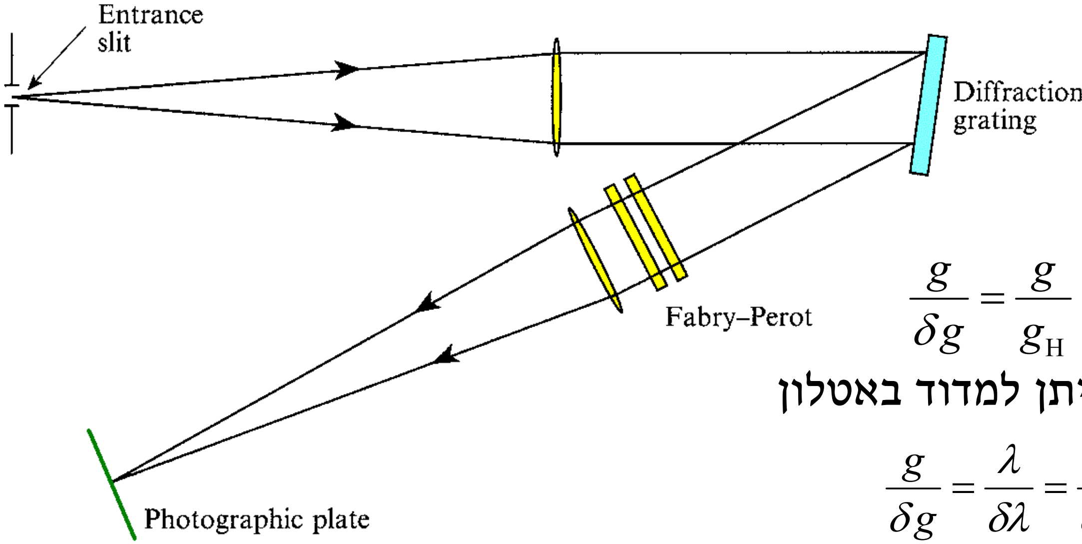
האטלון (étalon)

- שימוש מעשי בהתאבכות רבת-קרנים היא באֵטַלוֹן, או אינטרפרומטר פַּבְּרִי-פֶּרוֹ (Fabry-Perot).
- האטלון עשוי שני לוחות זכוכית עם מרווחים ביניהם כך שהם מקבילים לחלוטין.
- שני המשטחים הפנימיים מצופים לקבלת החזרה גבוהה והעברה נמוכה.
- איכות פני הלוחות הפנימיים (בלבד) צריכה להיות בדיוק רב, עד כדי $\lambda / 50$, וגם מקבילותם באיכות זו.
- הרווח d חייב להשאר יציב בחום ובזעזועים בדיוק כזה, למרות שהוא יכול להגיע לסנטימטרים.
- כאשר צופים במקור אור רחב ורחב סרט דרך האטלון, נוצרות טבעות חדות בזויות שבהן $g = 2m\pi$.
- הזויות עצמן מקיימות $\mu\, d \cos\theta = \mathrm{m}\,\lambda / 2$ כאשר מקדם השבירה הוא של האויר.
- כמו באינטרפרומטר מייכלסון, שטחי הטבעות יחסיים למספרים הטבעיים, אך כאן הן חדות מאוד.
- נדרוש שהמרחק בין הטבעות יהיה שקול לחצי עוביין בחצי הגובה, g_{H}. בגורם פינס F גדול נקבל

$$\frac{g}{\delta g} = \frac{g}{g_{\mathrm{H}}} = \frac{\pi m}{\sqrt{F}}$$



כושר הפרדה באטלון



- קיבלנו שכושר ההפרדה הוא

$$\frac{g}{\delta g} = \frac{g}{g_{\mathrm{H}}} = \frac{\pi m}{\sqrt{F}}$$

- אבל באותה מידה הדבר נכון לכל פרמטר שניתן למדוד באטלון

$$\frac{g}{\delta g} = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = \frac{d}{\delta d} = \frac{\mu}{\delta \mu}$$

- לכן לכל אחד מן הפרמטרים הללו כושר הפרדה זהה. לדוגמה, ניקח $\mathcal{R}^2 = 0.95$, $d = 25$ mm, $\lambda = 500$ nm
- נקבל במרכז $m = 2d / \lambda = 10^5$, $F = 1600$, $\delta g / g = 2.5\cdot 10^7$, שיפור משמעותי ביחס לשיטות אחרות.
- הדבר נובע מכושר ההפרדה שחישבנו, $\delta g / g = m N$ וכאן יש סדרים גבוהים ומספר גלים מתאבכים גדול.
- מספר ההחזרות התורמות להתאבכות הוא $2 \pi \sqrt{F} \approx 250$ ועדיין נדרש שהגל יהיה בדיוק $\lambda / 4$.
- סך כל הדיוק באיכות הלוחות הוא אם כן $\lambda / 1000$, כלומר 0.5 nm.
- כאשר מסתכלים על קוים ספקטרליים צפופים, יכולים להתערב סדרים גבוהים ונמוכים שלהם.
- משתמשים במקרה כזה במנסרה או סריג פשוט להקטנת הטווח הספקטרלי.
- כאשר קבוצת קוים נמדדת, עליהם להיות באותו סדר m, ואז מגדירים רוחב חופשי ספקטרלי $\delta\lambda = \lambda / 2m$.

החזרות מרובות בתוך מגביר

- שימוש חשוב של התאבכות רבת-גלים היא בליזר, שם יש תווך מגביר בתוך האינטרפרומטר.
- נניח שהשדה מוגבר פי G (הגבר) בכל סיבוב. הגל יהיה

$$\psi(g) = \mathcal{T}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \left(\mathcal{R}^2 G\right)^p \mathrm{e}^{ipg}$$

- אם $\mathcal{R}^2 G < 1$ התוצאה תהיה דומה לקודמת. אם ההגבר גדול, המכפלה הופכת ליחידה והסכום הוא

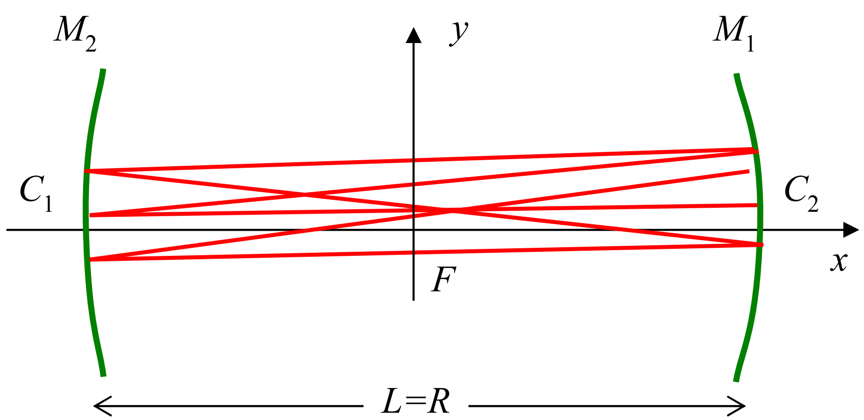
$$\psi(g) = \mathcal{T}^2 \sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{e}^{ipg} = \mathcal{T}^2 \sum_{q=0}^{\infty} \delta\left(g - 2\pi q\right)$$

- הספקטרום הוא אוסף קוים חדים שרוחבם מתאפס.
- יכול להיות שההגבר יהיה באופן זמני גדול מיחידה, אבל בממוצע על הרבה החזרות לא יעבור אותה.
- רוחב הפס הצפוי בליזר הוא $\delta k = \pi / \mu\, d$ או $\delta\lambda = \lambda^2 / 2\,\mu\, d$.
- למעשה לא מגיעים לרוחב כזה בגלל קרינה ספונטנית ותנועה תרמית התורמים לרעש.
- בנוסף, בסביבות אורך הגל הראשי של הליזר נפלט סדר אחד או שנים שעבורם ההגבר משמעותי.
- בליזר לא רציף זמן ההלם הוא T, ורוחב הפס אז $\delta\lambda > \lambda^2 / c\, T$.

מהוד חד-מוקדי

- במהוד הקונפוקלי שוים הרדיוסים והמוקד משותף באמצע. ראינו שמהוד זה יציב שולית.
- נתבונן בקרן הנעה ימינה במישור המוקדים. דמותה היא הקרן הנעה שמאלה באותו מישור. שתי הקרנים קשורות קשר פוריה. בגלל שאין הבדל בין הכיוונים, דורשים שכל קרן תהיה שווה לעקיפת פראונהופר של עצמה.
- מספר הפונקציות המקיימות את הדרישה שהקרן והתמרתה יהיו שוות הוא מוגבל מאוד. ראינו שהגאוסיאן ומסרק פונקציות ה-δ מקיימים דרישה זו. המסרק אינסופי ולא רציף ואנו נתרכז בגאוסיאן.
- פונקציה זו היא חלק ממשפחת פולינומי גאוס-הרמיט הידועים בתורת הקוונטים כפונקציות הגל בתנודה הרמונית:

$$a_n(x) = H_n\left(\frac{x}{\sigma}\right)\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$



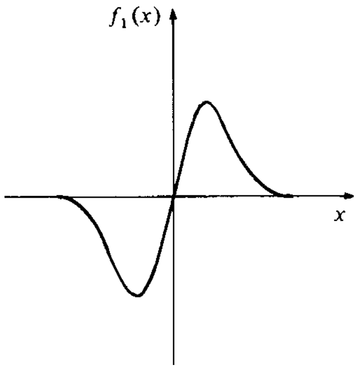
- פולינומים אלו קשורים ברקורסיה על ידי

$$2xH_n = H_{n+1} + 2nH_{n-1}\ ;\ H_0 = 1$$

- ומכאן מקבלים את הפולינומים הראשונים

$$H_0 = 1\ ;\ H_1 = 2x\ ;\ H_2 = 4x^2 - 2\ ;\ \cdots$$

פולינומי גאוס-הרמיט

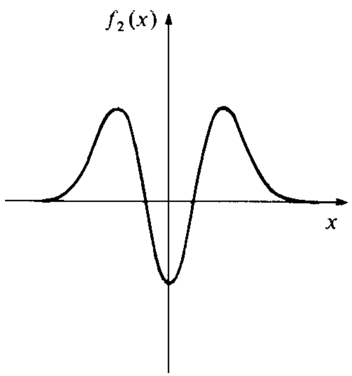


- הפולינומים הראשונים

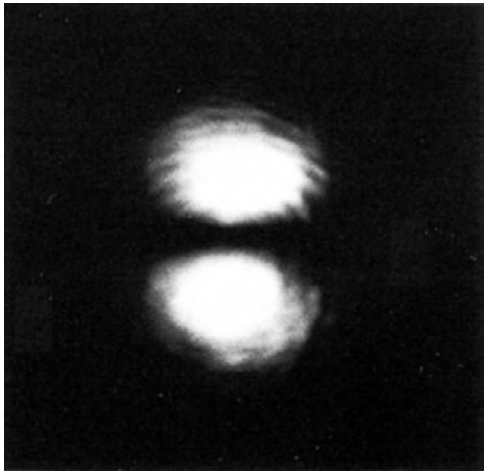
$$2xH_n = H_{n+1} + 2nH_{n-1} \;;\; H_0 = 1 \Rightarrow H_1 = 2x \;;\; H_2 = 4x^2 - 2 \;;\cdots$$

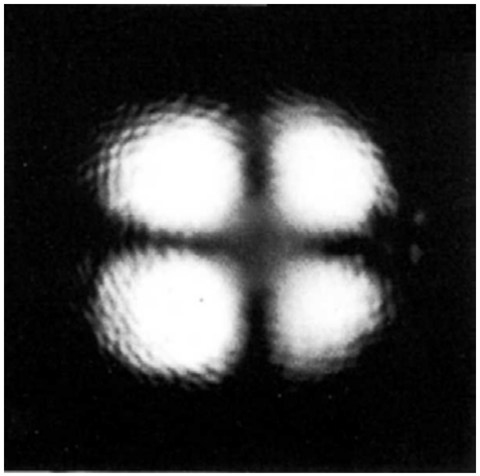
- ההרחבה לשני מימדים היא

$$a_{lm}(x,y) = H_l\left(\frac{x}{\sigma}\right) H_m\left(\frac{y}{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$



- אלה **האופנים הרוחביים** (transverse modes) וסופרים אותם לפי (l, m)





גודל המוקד המשותף

- נתבונן באופן (0, 0) שהוא גאוסיאן עגול ובתבנית העקיפה שלו

$$a(x,y)=\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right);\ A(u,v)=\exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2}\sigma^2\right)$$

- גודל כתם העקיפה נתון, עבור זויות קטנות, על ידי

$$p_x=\frac{uF}{k_0}\ ;\ p_y=\frac{vF}{k_0}$$

- נדרוש שויון הגלים

$$A\left(\frac{p_x k_0}{uF},\frac{p_y k_0}{vF}\right)=a(x,y)$$

- נציב ונקבל

$$\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\frac{1}{\sigma^2}\right)=\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\frac{k_0^2\sigma^2}{F^2}\right)$$

- מקבלים מכאן כי $\sigma^2=F/k_0$. אם רדיוס הנקודה הוא בקירוב $\sigma/\sqrt{2}$, נקבל

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{F}{2k}}=\sqrt{\frac{F\lambda}{4\pi}}$$

- כאשר הקרן תגיע למראות במרחק F היא תעבור עקיפת פרנל, וגודלה יהיה בערך כפול מהרדיוס שחישבנו במוקד.